Análisis 1 - Alimentos - 1° cuatrimestre 2021 (virtual)

Práctica 6

Extremos de funciones y optimización

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase C^2 tal que tiene un extremo estricto en $a \in \mathbb{R}$. ¿Es necesariamente $f''(a)$ positiva o negativa?

2. Calcular los extremos de $f(x,y) = x^2 + y^4$ y de $g(x,y) = x^4 + y^4$ y sus hessianos en dichos puntos.

3. Encontrar los puntos críticos de las siguientes funciones y analizar cuáles son puntos de ensilladura:

   a) $f(x,y) = x^2 - y^2$

   b) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x$

   c) $f(x,y) = xy$

   d) $f(x,y) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2 y}} & \text{si} \quad xy \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad xy = 0 \end{cases}$

4. Sea $f(x,y) = \left(y - 3x^2\right)\left(y - x^2\right)$. Probar que:

   a) $(0,0)$ es un punto de ensilladura.

   b) El determinante de la matriz $Hf(0,0)$ es cero.

   c) f tiene un mínimo relativo en $(0,0)$ sobre cada recta que pase por $(0,0)$. Es decir, $t \mapsto f(tv_1, tv_2)$ tiene un mínimo relativo en 0 para cada elección de $V = (v_1, v_2) \neq \mathbb{O}$.

5. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$

   a) Probar que $(0,0)$ es un punto crítico pero no extremo.

   b) Probar que $\pm\sqrt{2}(1,-1)$ son mínimos absolutos. ¿Hay máximos relativos?

6. Para las siguientes funciones, encontrar los puntos críticos y analizar cuáles son máximos locales, mínimos locales o puntos de ensilladura.

   a) $f(x,y) = (2x + 1 - y)^2$

   b) $f(x,y) = x^2 - y^2 - xy + 3x + 3y + 1$

   c) $f(x,y) = 10x^2 + 10y^2 + 12xy + 2x + 6y + 1$

   d) $f(x,y) = e^{1+x^2+y^2}$

   e) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} + xy$

   f) $f(x,y) = (x-y)^2 + 1 + 2(x-y)$

   g) $f(x,y) = e^{x-y}\left(x^2 - 2y^2\right)$

   h) $f(x,y,z) = xy + z^2$

   i) $f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + z^2 - xy + 2xz + z$

   j) $f(x,y) = x^2 - 2xy^2 + y^4 - y^5$

7. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^2 tal que:

$$f(0,1) = 0, \quad \nabla f(0,1) = (0,2) \quad \text{y} \quad Hf(0,1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

   Si $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ está definida por $g(x,y) = 3x^2y + e^{f(x,y)} - 2y$

a) Calcular $Hg(0,1)$

b) ¿Tiene g un extremo relativo en $(0,1)$?

8. Decidir si existen o no, números reales a y b tales que la función

$$f(x,y) = e^{y^4-x^2} + a(x-y) + b(x-2)(y-1)$$

tenga un mínimo relativo en el punto $(2,1)$.

9. En una empresa se fabrican recipientes con forma de prisma rectangular con las siguientes características: la suma de todas sus aristas es de 30 metros y su superficie total es de 36 metros cuadrados. Determinar la capacidad máxima y mínima de estos recipientes.
Ayuda: El prisma rectangular que fabrica la empresa no es otra cosa que una caja de zapatos gigante. Respuesta: $Vol_{min} = 13{,}5m^3$, $Vol_{max} = 14m^3$.

10. La empresa Pejsi quiere fabricar "Narajsi", un nuevo producto sabor naranja que saldrá al mercado envasado en latas de aluminio de forma cilíndrica, con un volumen de $314cm^3$. Recordemos que la superficie del cilindro (sin las tapas) es $S = A2\pi R$, donde A es la altura del cilindro y R es el radio; mientras que la superficie de cada tapa es $T = \pi R^2$. Por otro lado, el volumen de un cilindro es $A\pi R^2$.

a) ¿Cuál debe ser la relación entre el radio de la base y la altura de la lata para que Pejsi minimice la cantidad (luego el costo) del aluminio empleado?

b) Misma pregunta si ahora para las tapas se usa aluminio del doble de espesor que para el borde cilíndrico de la lata.

Ayuda para a) la superficie total de la lata es la del cilindro más las dos tapas, luego es $A2\pi R + 2\pi R^2$. *Pensar ahora la restricción que nos da el volumen. Respuesta para b) es* $R \simeq 2,92$, $A \simeq 11,7$.

11. Se quiere hacer un envio de carga de $480m^3$ de una sustancia. Los envios se hacen en camión, en una caja sin tapa, de dimensiones a determinar. El costo de la operación es el costo de armar la caja (una sola vez) más $800pe$ por viaje del camión. Las restricciones son las siguientes: el alto de la caja debe ser exactamente de $2m$ para que entre en el depósito. La base es rectangular y debemos determinar sus proporciones. El costo del m^2 para el material de la base de la caja es de $2000pe$, el costo para el frente y posterior es de $1000pe/m^2$, y el costo para los laterales de la caja es de $500pe/m^2$. Notemos que las cajas más pequeñas son más económicas pero necesitaríamos mas viajes para trasladar los $480m^3$ del material. ¿Cuáles son las proporciones de la base de la caja que hacen mínimo el costo de toda la operación?
Ayuda: si el volumen de la caja es $2xy$ metros cúbicos (donde x es el ancho en metros, y es el largo en metros), entonces el costo de cada viaje es $\frac{480}{2xy} \cdot 800$. *Esto se suma al costo de construir la caja una vez, para obtener la función a optimizar. Respuesta al problema* $x = 4m$, $y = 2m$.

12. Determinar los extremos absolutos de $f|_A$ en los siguientes casos:

a) $f(x,y) = xy(x-y)^2 \qquad A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0\right\}$;

b) $f(x,y) = 2x^2 - xy + y^2 + 7x \qquad A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \, |x| \leq 3, |y| \leq 3\right\}$;

c) $f(x, y) = 2x + 4y - x^2 - y^2 - 3 \qquad A = \mathbb{R}^2$;

d) $f(x, y) = 2x + 4y - x^2 - y^2 - 3 \qquad A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \, |x| \le 1, |y| \le 1\right\}$.

13. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función

$$f(x, y) = (y - 1)^2 - x^3 + 3x^2 + 5.$$

Encontrar, justificando su existencia, el máximo y el mínimo valor que alcanza f en la región

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 \le y \le 4\}.$$

14. Sea $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x - 2y$. Hallar los máximos y mínimos globales de $f(x, y)$, si existen, en cada una de las siguientes regiones:

a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \ge 0, y \ge 0, x + y \le 4\}$.

b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \ge 0, y \ge 0, x + y \ge 4\}$

Nota: Cuando los máximos y mínimos existan, justificar por qué existen y dar los puntos en los cuáles se alcanzan, y cuando no existan justificar por qué.

15. Encontrar el punto de la parábola $y^2 = 4x$ cuya distancia al $(1, 0)$ es mínima.

16. Encontrar los máximos y mínimos de $f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - y^2 + 1$ dentro del círculo unitario y en el borde.

17. Encontrar el punto de la superficie $z = xy - 1$ más cercano al origen.

18. La temperatura de una placa en un punto cualquiera (x, y) viene dada por la función $T(x, y) = 25 + 4x^2 - 4xy + y^2$. Una alarma térmica, situada sobre los puntos de la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$, se dispara a temperaturas superiores a 180 grados o inferiores a 20 grados. ¿Se disparará la alarma?

19. Sea $f(x, y) = e^{x+y}(x^2 - 2y^2)$.

a) Hallar los puntos críticos de f en $\mathbb{R}^2$ y clasificarlos.

b) Hallar los extremos absolutos de $f|_A$ con $A \subseteq \mathbb{R}^2$ dado por

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \ge 0, \; y \ge 0, \; x + y \le 2\}.$$